

# Avis de Soutenance

Monsieur Martin GILABERT VIO

## Mathématiques

Soutiendra publiquement ses travaux de thèse intitulés  
*Aspects dynamiques et probabilistes des actions proximales de groupes*

Travaux dirigés par Monsieur Nicolas MATTE BON

Soutenance prévue le **jeudi 18 juin 2026** à 14h00

Lieu : Université Lyon 1, Bâtiment Jean Braconnier - salle Fokko du Cloux au 21 avenue Claude Bernard à Villeurbanne.

### Composition du jury proposé

M. Nicolas MATTE BON	Chargé de recherche	CNRS Lyon	Directeur de thèse
M. Andrés NAVAS FLORES	Professeur	Université de Santiago de Chile (Chili)	Rapporteur
Mme Kathryn MANN	Directrice de recherche	CNRS Paris	Examinatrice
Mme Hélène EYNARD-BONTEMPS	Professeure des universités	Sorbonne Université	Examinatrice
M. Jean LECUREUX	Professeur des universités	Université de Bordeaux	Examineur
M. Todor TSANKOV	Professeur des universités	Université Lyon 1	Examineur

**Mots-clés :** Théorie de groupes, Dynamique unidimensionnelle, Théorie ergodique, Marches aléatoires, Mesures stationnaires

### Résumé :

Cette thèse est consacrée à l'étude des actions proximales de groupes dénombrables en dimension un et zéro depuis la perspective de la dynamique et des probabilités. Les résultats sont de nature assez variée. Un fil conducteur, parmi d'autres, est la présence des groupes de Thompson  $\$F$ ,  $T\$$  et  $\$V\$$ ; presque la totalité des résultats s'appliquent à l'un de ces exemples, et sont parfois motivés par ceux-ci.. Le Chapitre 2 donne une nouvelle preuve d'une version dynamique de l'alternative de Tits pour le groupe de Thompson  $\$V\$$ , qui se généralise aisément aux groupes de presque automorphismes d'un arbre enraciné localement fini agissant sur son bord. Le Chapitre 3 montre une version probabiliste de l'alternative de Tits dynamique, due à G. Margulis, pour les groupes agissant minimalement et proximatement par difféomorphismes de  $\$S^1\$$ , dont la preuve est inspiré par le même phénomène pour marches aléatoires sur une groupe linéaire non virtuellement résoluble. La méthode requiert des hypothèses de moment sur les mesures de probabilité pertinentes, et un énoncé plus faible (et plus simple de prouver) reste vrai sans hypothèses de moment pour des sous-groupes d'homéomorphismes de  $\$S^1\$$ . Dans le Chapitre 4 on étudie la question de déterminer sous quelles conditions le bord de Poisson d'un groupe dénombrable

agissant sur  $S^1$  proximale et minimale. Équipé avec une mesure de probabilité, s'identifie avec  $S^1$  muni de sa unique mesure stationnaire. Nous démontrons que c'est jamais le cas si l'action n'est pas topologiquement libre et la mesure de probabilité sur le groupe a entropie de Shannon finie. Ceci s'applique au groupe de Thompson  $T$ , pour lequel on peut donner une preuve alternative et plus courte qui se généralise à des groupes de homéomorphismes affines par morceaux de  $S^1$ , et répond à une question de B. Deroin et d'Andrés Navas. Ce travail est issu d'une collaboration avec Cosmas Kravaris et Eduardo Silva. Le Chapitre 5 étudie l'existence de bords stationnaires sur l'espace de sous-groupes moyennables d'un groupe dénombrable, motivé par des liens avec la  $C^*$ -simplicité de groupes dénombrables. On trouve un critère sur la dynamique du groupe agissant par conjugaison sur son espace de sous-groupes moyennables pour assurer l'existence d'un bord dans tel espace (pour une certaine mesure de probabilité sur le groupe) et on l'applique à des produits en couronne et au groupe de Thompson  $F$ . On exhibe une vaste classe de groupes exhibant de la courbure non positive et qui n'admettent pas de tels bords pour n'importe quelle mesure de probabilité. Ce travail est issu d'une collaboration en cours avec Anna Cascioli et Eduardo Silva. Finalement, le Chapitre 6 étudie la classe de groupes dénombrables tels que la relation de conjugaison entre ses actions minimales par homéomorphismes de la droite admet une transversale Borélienne. On démontre que cette classe est close pour certaines opérations entre groupes, et qu'elle inclut tous les groupes de type fini qui se plongent dans le groupe d'homéomorphismes projectifs par morceaux de la droite. Ce travail est issu d'une collaboration avec Joaquín Brum et Nicolás Matte Bon.

### Summary:

This thesis is devoted to the study of proximal actions of countable groups in dimensions one and zero from the perspective of dynamics and probability. The character of the results is fairly diverse. A common theme, among others, is the presence of Thompson's groups  $F$ ,  $T$  and  $V$ ; almost all the results can be applied to one of these examples, and are sometimes motivated by them. Chapter 2 gives a new proof of a dynamical version of the Tits alternative for Thompson's group  $V$ , which generalizes to groups of almost automorphisms of a rooted locally finite tree acting on its boundary. Chapter 3 shows a probabilistic version of the dynamical Tits alternative, due to G. Margulis, for groups acting minimally and proximally by diffeomorphisms of  $S^1$ , whose proof is inspired by the same phenomenon for random walks on non-virtually solvable linear groups. The method requires moment hypotheses on the corresponding probability measures, and a weaker statement (which is easier to prove) holds true without moment hypotheses on subgroups of homeomorphisms of  $S^1$ . In Chapter 4 we study the question of determining under which conditions the Poisson boundary of a countable group acting minimally and proximally on  $S^1$ , endowed with a probability measure, can be identified with  $S^1$  equipped with its unique stationary measure. We show that this is never the case if the action is not topologically free and the probability measure on the group has finite Shannon entropy. The result applies to Thompson's group  $T$ , for whom we can give an alternative and shorter proof which generalizes to groups of piecewise affine homeomorphisms of  $S^1$ , and answers a question of B. Deroin and of A. Navas. This work is the result of a collaboration with Cosmas Kravaris and Eduardo Silva. Chapter 5 studies the existence of stationary boundaries with values on the space of amenable subgroups of a countable group, motivated by links with  $C^*$ -simplicity of countable groups. We find a criterion for the dynamics of the group acting by conjugation on its space of amenable subgroups that ensures the existence of a boundary on this space (for a certain probability measure on the group) and we apply it to wreath products and to Thompson's group  $F$ . We exhibit a large class of groups exhibiting non-positive curvature that do not admit such boundaries for any probability measure. This work is the result of an ongoing collaboration with Anna Cascioli and Eduardo Silva. Finally, Chapter 6 studies the class of countable groups such that the conjugacy relation between their minimal actions by homeomorphisms of the real line admits a Borel transversal. We show that this

class is closed under natural group-theoretic operations, and that it contains all finitely generated groups that embed into the group of piecewise projective homeomorphisms of the line. This work is the result of a collaboration with Joaquín Brum and Nicolás Matte Bon.